第４講 微分・積分

1 $a>0$ とし，$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ とおく。座標平面上で，放物線 $y=x^2+2x+1$ を C，放物線 $y=f(x)$ を D とする。また，ℓ を C と D の両方に接する直線とする。

(1) ℓ の方程式を求めよう。

ℓ と C は点 $(t,\ t^2+2t+1)$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,t+\boxed{\text{イ}}\right)x-t^2+\boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots①$$

である。また，ℓ と D は点 $(s,\ f(s))$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{エ}}\,s-\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}\right)x$$
$$-s^2+\boxed{\text{キ}}\,a^2+\boxed{\text{ク}} \quad \cdots\cdots②$$

である。ここで，①と②は同じ直線を表しているので，$t=\boxed{\text{ケ}}$，$s=\boxed{\text{コ}}\,a$ が成り立つ。

したがって，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}$ である。

（1は次ページに続く。）

(2)　二つの放物線 C，D の交点の x 座標は [ス] である。

C と直線 ℓ，および直線 $x=$ [ス] で囲まれた図形の面積を S とすると，

$S=\dfrac{a^{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$ である。

(3)　$a \geqq \dfrac{1}{2}$ とする。二つの放物線 C，D と直線 ℓ で囲まれた図形の中で $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分の面積 T は，$a>$ [タ] のとき，a の値によらず

$$T=\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$$

であり，$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq$ [タ] のとき

$$T=-\boxed{テ}\,a^3+\boxed{ト}\,a^2-\boxed{ナ}\,a+\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$$

である。

(4)　次に，(2)，(3)で定めた S，T に対して，$U=2T-3S$ とおく。a が $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq$ [タ] の範囲を動くとき，U は $a=\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒフ}}$ をとる。

2　3 次関数 $f(x)$ は，$x=-1$ で極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとり，$x=3$ で極大値をとる。また，曲線 $y=f(x)$ は点 $(0,\ 2)$ を通る。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $\boxed{\text{ア}}$ 次関数であり，$f'(x)$ は

$$\left(x+\boxed{\text{イ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)$$

で割り切れる。

(2)　$f(x)=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^3+\boxed{\text{キ}}x^2+\boxed{\text{ク}}x+\boxed{\text{ケ}}$ である。

(2は次ページに続く。)

(3)　方程式 $f(x)=0$ は，三つの実数解をもち，そのうち負の解は [コ] 個である。

また，$f(x)=0$ の解を a，b，c $(a<b<c)$ とし，曲線 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を S，曲線 $y=f(x)$ の $b \leqq x \leqq c$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を T とする。

このとき

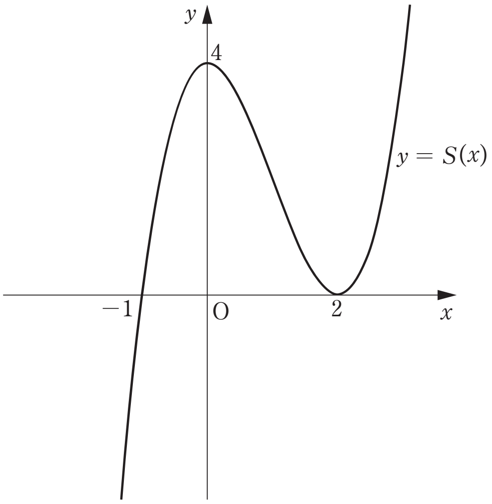
$$\int_a^c f(x)\,dx = \boxed{\text{サ}}$$

である。[サ] に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

⓪ 0	① S	② T	③ $-S$	④ $-T$
⑤ $S+T$	⑥ $S-T$	⑦ $-S+T$	⑧ $-S-T$	

3　a を定数とする。関数 $f(x)$ に対し，$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ とおく。このとき，関数 $S(x)$ の増減から $y=f(x)$ のグラフの概形を考えよう。

(1)　$S(x)$ は 3 次関数であるとし，$y=S(x)$ のグラフは次の図のように，2 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 4)$ を通り，点 $(2,\ 0)$ で x 軸に接しているとする。



このとき，

$$S(x)=\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。$S(a)=\boxed{\text{エ}}$ であるから，a を負の定数とするとき，$a=\boxed{\text{オカ}}$ である。

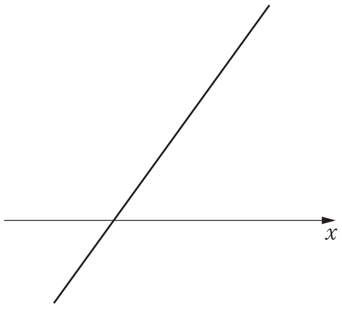
(3は次ページに続く。)

関数 $S(x)$ は $x=$ [キ] を境に増加から減少に移り，$x=$ [ク] を境に減少から増加に移っている。したがって，関数 $f(x)$ について，$x=$ [キ] のとき [ケ] であり，$x=$ [ク] のとき [コ] である。また，
[キ] $<x<$ [ク] の範囲では [サ] である。
[ケ]，[コ]，[サ] については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

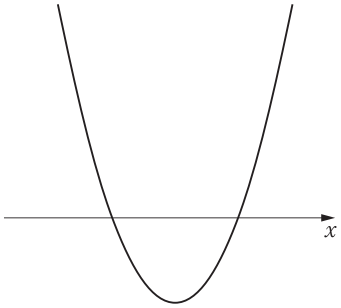
⓪ $f(x)$ の値は 0　　① $f(x)$ の値は正　　② $f(x)$ の値は負
③ $f(x)$ は極大　　④ $f(x)$ は極小

$y=f(x)$ のグラフの概形として最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。[シ]

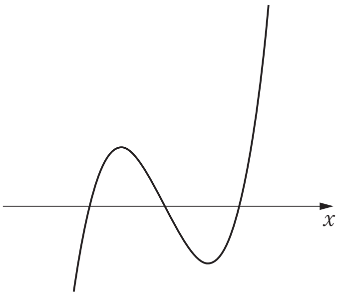
⓪



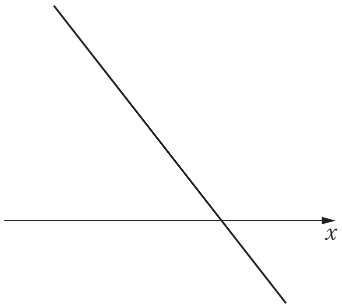
①



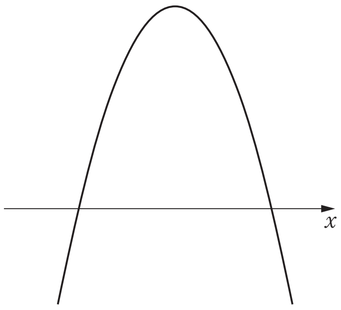
②



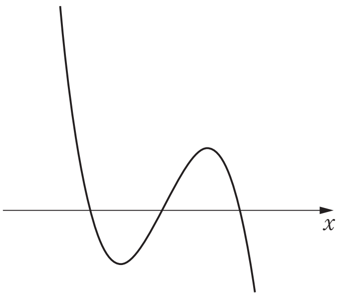
③



④



⑤

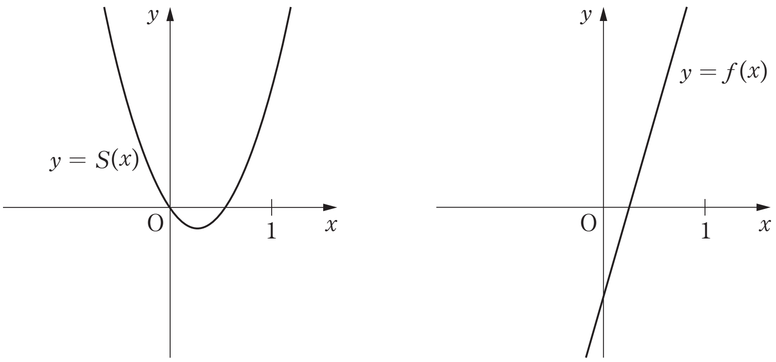


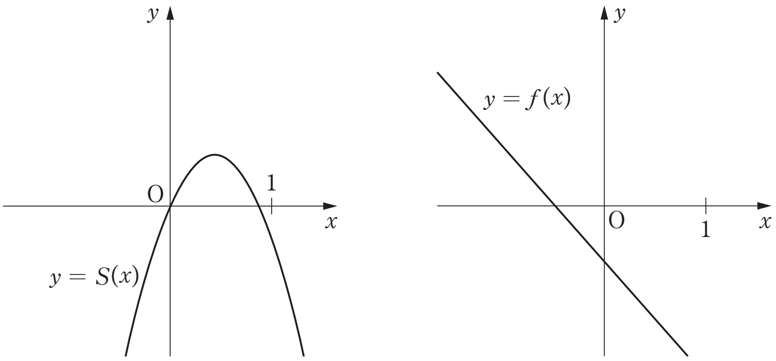
（3は次ページに続く。）

(2)　(1)からわかるように，関数 $S(x)$ の増減から $y=f(x)$ のグラフの概形を考えることができる。

$a=0$ とする。次の⓪～④は $y=S(x)$ のグラフの概形と $y=f(x)$ のグラフの概形の組である。このうち，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ の関係と**矛盾するもの**を**二つ選べ**。

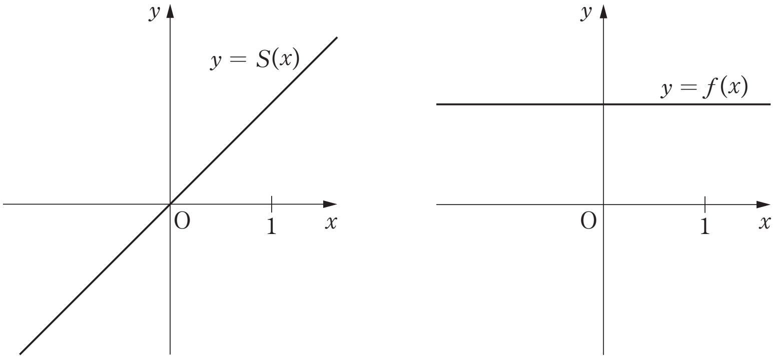
ス

⓪


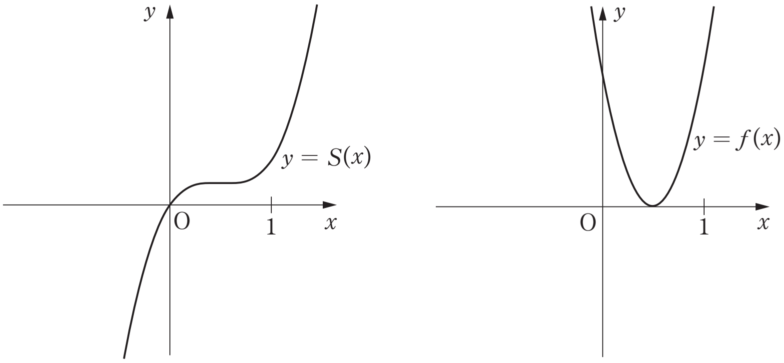
①


(③は次ページに続く。)

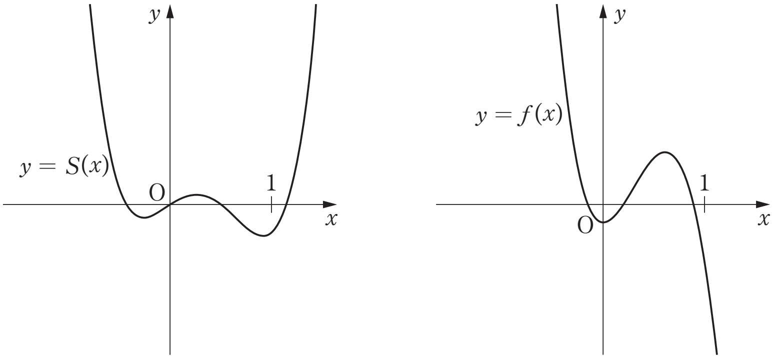
②



③



④



第４講　微分・積分

1 (1)　$C: y=x^2+2x+1$ より $y'=2x+2$

よって，点 $(t,\ t^2+2t+1)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$y=(2t+2)(x-t)+t^2+2t+1$　すなわち　$y=(2t+2)x-t^2+1$ ……①

$D: f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$　より　$f'(x)=2x-(4a-2)$

よって，点 $(s,\ f(s))$ における D の接線 ℓ の方程式は

$y=(2s-4a+2)(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1$

すなわち　$y=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1$ ……②

①と②は同じ直線を表しているので

$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases}$　つまり　$\begin{cases} s-t=2a & \cdots\cdots③ \\ s^2-t^2=4a^2 & \cdots\cdots④ \end{cases}$

④より $(s+t)(s-t)=4a^2$　これに③を代入して

$2a(s+t)=4a^2$　　$a>0$ より　$s+t=2a$ ……⑤

③と⑤より　$t=0,\ s=2a$

このとき①より，ℓ の方程式は $y=2x+1$

(2)　$C: y=x^2+2x+1$ と $D: y=f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ を連立させて

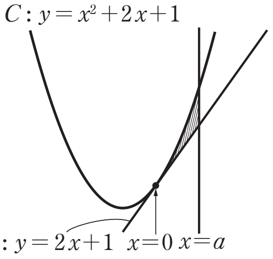
$x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$

$4ax=4a^2$

$a>0$ より　$x=a$

よって，放物線 C と D の交点の x 座標は a

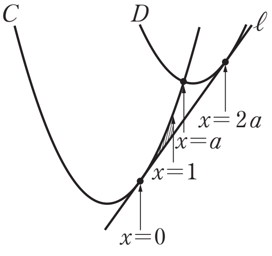
C と ℓ，および $x=a$ で囲まれた図形の面積を S とすると，



$S=\int_0^a\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}\,dx=\int_0^a x^2\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$

(3)　$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき，$2a\geqq1$



このとき C と D，および ℓ で囲まれた図形の中で，$0\leqq x\leqq1$ を満たす部分の面積 T は

$a>1$ のとき

$T=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

$$T = \int_0^a \{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}\,dx$$

$$+\int_a^1 \{(x^2-(4a-2)x+4a^2+1)-(2x+1)\}\,dx$$

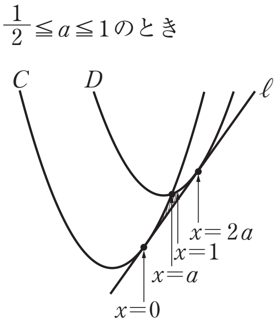
$$= S + \int_a^1 (x^2-4ax+4a^2)\,dx$$

$$= S + \int_a^1 (x-2a)^2\,dx$$

$$= S + \left[\frac{(x-2a)^3}{3}\right]_a^1$$

$$= \frac{a^3}{3} + \frac{(1-2a)^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3}$$

$$= \frac{a^3}{3} + \frac{1-6a+12a^2-8a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = -2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$$



(4)　$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

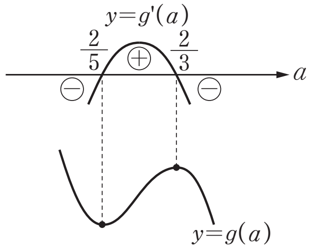
$$U = 2T - 3S = -5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}$$

これを $g(a)$ とおくと

$$g'(a) = -15a^2+16a-4 = -(5a-2)(3a-2)$$

よって，$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ における $g(a)$ の増減表は下図

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		↗		↘	



したがって，U は $a = \frac{2}{3}$ で最大値

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = -5\cdot\frac{8}{27}+8\cdot\frac{4}{9}-4\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{1}{27}(-40+96-72+18) = \frac{2}{27}$$

をとる。

2　(1)　3 次関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は 2 次関数である。

また，$f(x)$ が $x=-1$，3 で極値をとるので，$f'(-1)=0$ かつ $f'(3)=0$

よって，$f'(x)$ は $x+1$，$x-3$ を因数にもつので，$(x+1)(x-3)$ で割り切れる。

(2)　$f'(x) = a(x+1)(x-3) = a(x^2-2x-3)$ とおくと，

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x^2-2x-3)\,dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)+C$　(C は積分定数)

$y=f(x)$ が点 $(0,\ 2)$ を通るので，$f(0)=2$　　よって　$C=2$

よって，$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)+2$

また，$f(x)$ は $x=-1$ で極小値 $-\frac{4}{3}$ をとるので，$f(-1)=-\frac{4}{3}$ より

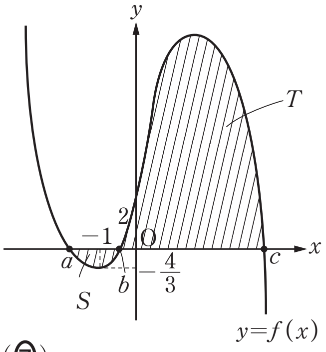
$$a\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)\right\}+2=-\frac{4}{3}\qquad \frac{5}{3}a+2=-\frac{4}{3}$$

よって　$a=-2$

したがって，$f(x)=-2\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)+2=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+2$

(3)　$f(-1)=-\frac{4}{3}<0$，$f(0)=2>0$ より，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフは x 軸と $x<-1$，$-1<x<0$，$0<x$ において共有点をもつ。

したがって，方程式 $f(x)=0$ は 3 つの実数解をもち，そのうち負の解は 2 個である。



右図より

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=-S+T\quad (⑦)$$

3　(1)　$S(x)$ は 3 次関数で，$y=S(x)$ のグラフは x 軸と $x=-1$ で交点を持ち，$x=2$ で接することから，

$S(x)=k(x+1)(x-2)^2$　$(k\neq 0)$

とおくことができる。また，$y=S(x)$ のグラフは点 $(0,\ 4)$ を通るので，$S(0)=4$

したがって，$4k=4$ より　$k=1$

ゆえに，$S(x)=(x+1)(x-2)^2$

また，$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ において，$S(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ であるから，

$(a+1)(a-2)^2=0$

$a<0$ のとき，$a=-1$

グラフより，関数 $y=S(x)$ は $x=0$ を境に増加から減少に移り，$x=2$ を境に減少から増加に移っている。

また，$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt=[F(t)]_a^x=F(x)-F(a)$ より

$S'(x)=f(x)$

$S(x)$ の増減，および $S'(x)$ すなわち $f(x)$ の正負は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)=$ $S'(x)$	＋	0	－	0	＋
$S(x)$	↗	4	↘	0	↗

したがって，関数 $f(x)$ について

$x=0$ のとき $f(x)$ の値は 0 （⓪）

$x=2$ のとき $f(x)$ の値は 0 （⓪）

$0<x<2$ の範囲では $f(x)$ の値は負（②）である。

また，$y=f(x)$ のグラフの概形として最も適当なものは ①

(2) $a=0$ のとき $S(0)=0$

⓪～④における $y=S(x)$ のグラフはいずれも $S(0)=0$ を満たす。

⓪～④のそれぞれのグラフで，$y=f(x)=S'(x)$ のグラフの正負と，$y=S(x)$ のグラフの増減が矛盾するものを二つ選ぶ。

①：$y=f(x)$ のグラフにおいて $f(x)=0$ となる x を α とすると，$\alpha<0$ であり，$x=\alpha$ を境に正から負に転じているが，$y=S(x)$ のグラフの $x<0$ の部分で増加から減少に移る点はない。よって矛盾。

④：$y=f(x)$ のグラフにおいて $f(x)=0$ となる x を α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とすると $\alpha<0<\beta<\gamma$ であり，$x=\alpha$ を境に正から負に転じているが，$y=S(x)$ のグラフの $x<0$ の部分で増加から減少に移る点はない。よって矛盾。

以上より，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ の関係と矛盾するものは ①と④